

## Ejercicios Logaritmos (2)

### Propiedades, Ecuaciones

#### I. Previo:

- 1) ¿Qué significa la expresión  $\log_a(M)$ ?

Es el **exponente** al cual se debe elevar  $a$  para obtener  $M$ . Se lee logaritmo de  $M$  en la base  $a$ .

$$\log_a(M) = x \quad \text{si y solo si} \quad a^x = M, \quad \text{es decir:} \quad a^{\log_a M} = M$$

- 2) ¿Qué significa la expresión  $\log(C)$ ?

Es el **exponente** al cual se debe elevar 10 para obtener  $C$ . Se lee logaritmo de  $C$  en la base 10.

$$\log(C) = y \quad \text{si y solo si} \quad 10^y = C, \quad \text{es decir:} \quad 10^{\log C} = C$$

- 3) ¿Para qué valores de  $C$  existe  $\log_a(C)$ ? (en particular  $\log(C)$ ?)

$\log_a(C)$  está definida para  $C > 0$ , es decir, solamente para números reales positivos.

#### II. Propiedades de los logaritmos

- 1) Logaritmo de un producto:  $\log_a(M \cdot C) = \log_a(M) + \log_a(C)$

*Ejemplos:* calcule cada lado por separado, y compare:

a)  $\log_2(8 \cdot 4) = \log_2 32 =$   $\log_2 8 + \log_2 4 =$

b)  $\log(17 \cdot 4) = \log 68 =$   $\log 17 + \log 4 =$  (use calculadora)

- 2) Logaritmo de un cuociente:  $\log_a\left(\frac{M}{C}\right) = \log_a(M) - \log_a(C)$

*Ejemplos:* calcule cada lado por separado, y compare:

a)  $\log_2\left(\frac{32}{4}\right) =$   $\log_2 32 - \log_2 4 =$

b)  $\log\left(\frac{17}{4}\right) =$   $\log 17 - \log 4 =$  (use calculadora)

- 3) Logaritmo de una potencia:  $\log_a(M^t) = t \log_a(M)$

*Ejemplos:*

a)  $\log_2(2^5) = \log_2 32 =$   $5 \log_2 2 =$

b)  $\log(3^5) =$   $5 \log 3 =$

c) Calcule  $\log_2(8) =$   $\log_2(8^9) =$

- 4) Logaritmos de números particulares

$\log_a(a) = 1$	$\log_a 1 = 0$
-----------------	----------------

*Ejemplos:*

a)  $\log_5(5) =$  b)  $\log 10 =$  c)  $\log_5 1 =$  d)  $\log 1 =$

e)  $\log_5(5^{12}) =$  f)  $\log(10^7) =$  g)  $\log_3 \sqrt{3} =$  h)  $\log_2\left(\frac{1}{2^5}\right) =$

5) Cambio de base

$\log_a(M) = \frac{\log_b(M)}{\log_b(a)}$	$\log_a(M) = \frac{\log(M)}{\log(a)}$
---	---------------------------------------

**Nota:** Para calcular el logaritmo de un número en la base  $a$ , en general, se hace cambio de base. Usualmente se utiliza como nueva base la base 10. (También se puede usar la base  $e$ ).

*Ejemplos:* Use cambio de base para calcular cada logaritmo (nueva base: 10).

a)  $\log_2(32) =$

b)  $\log_5 137 =$

**III. Ecuaciones**

1) Ecuaciones de la forma  $\log_a(M) = C$  donde  $C$  es una constante (número real).

En general, para resolver ecuaciones de esta forma, se aplica la definición de logaritmo.

*Ejemplo.* Resolver la ecuación  $\log_3(2x - 5) = 2$

*Solución.*  $\log_3(2x - 5) = 2$

$$3^2 = 2x - 5 \quad \text{Luego } x = 7.$$

Se deja como ejercicio, comprobar que  $x = 7$  es solución de la ecuación original.

2) Ecuaciones de la forma  $\log_a(M) = \log_a(C)$

En general, para resolver ecuaciones de esta forma, se aplica la propiedad:

$\log_a(M) = \log_a(C) \implies M = C$
--

*Ejemplo.* Resolver la ecuación  $\log_5(2x - 23) = \log_5(x + 51)$

*Solución.*  $\log_5(2x - 23) = \log_5(x + 51) \implies 2x - 23 = x + 51$ , de donde  $x = 74$

*Comprobación:*  $\log_5(2 \cdot 74 - 23) = \log_5(125) = 3$        $\log_5(74 + 51) = \log_5(125) = 3$

3) Otras ecuaciones que contienen logaritmo, requieren del uso de propiedades de los logaritmos.

4) **Ecuaciones exponenciales simples.** En general, se resuelven aplicando logaritmo (en la misma base) a ambos lados.

*Ejemplos.*

a) Resolver la ecuación  $3^x = 17$

*Solución.*  $3^x = 17$

$$\log(3^x) = \log(17)$$

$$x \log(3) = \log(17)$$

$$x = \frac{\log(17)}{\log(3)} = \frac{1,230}{0,477} \approx 2,579$$

Aplicando *log* en base 10 a ambos lados

*Propiedad* logaritmo de una potencia

Usando la calculadora

b) Resolver la ecuación  $5^{x+3} = 4^x$

*Solución.*  $5^{x+3} = 4^x$

$$\log(5^{x+3}) = \log(4^x)$$

$$(x + 3) \log(5) = x \log(4)$$

Aplicando *log* en base 10 a ambos lados

*Propiedades*

Use calculadora para calcular  $\log(5)$ ,  $\log(4)$  y luego despeje  $x$ .

#### IV. Ejercicios

1) Dados  $\log 2 = 0,30$ ;  $\log 3 = 0,47$  y  $\log 5 = 0,69$ , calcule usando propiedades:

- |                                   |                                    |  |                                   |
|-----------------------------------|------------------------------------|--|-----------------------------------|
| a) $\log 15$                      | b) $\log 16$                       | c) $\log \sqrt{5}$                       | d) $\log 12$                      |
| e) $\log\left(\frac{2}{5}\right)$ | f) $\log\left(\frac{15}{2}\right)$ | g) $\log(3^{-5})$                        | h) $\log \sqrt{30}$               |
| i) $\log(2\sqrt{3})$              | j) $\log(4^{15})$                  | k) $\log\left(\frac{\sqrt{6}}{8}\right)$ | l) $\frac{\log \sqrt{6}}{\log 8}$ |

2) Dado  $\log 45 = 1,653$  calcule:

- |               |                   |                 |                   |
|---------------|-------------------|-----------------|-------------------|
| a) $\log 450$ | b) $\log(450000)$ | c) $\log(0,45)$ | d) $\log(0,0045)$ |
|---------------|-------------------|-----------------|-------------------|

3) Calcule:  $9 \log_a a - \log_a a^5 + \log_a a^{-3}$

4) Escriba cada expresión usando logaritmos simples (expandir).

- |                             |  |  |
|-----------------------------|--|--|
| a) $\log_a (R \cdot S)$     | b) $\log_a (x^4)$                      | c) $\log_2 \left(\frac{C}{P}\right)$       |
| d) $\log_4 C^{\frac{1}{3}}$ | e) $\log_b \left(\frac{C}{D^2}\right)$ | f) $\log \left(\frac{P \cdot R}{M}\right)$ |
| g) $\log(10 R^2)$           | h) $\log(7 R \cdot S)$                 | i) $\log \sqrt{C}$                         |

5) Reduzca cada expresión a un solo logaritmo.

- |                                     |                                    |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| a) $\log 7 + \log 2$                | b) $\log 15 - \log 3$              |
| c) $\log x + \log 34$               | d) $\log_2 C - \log_2 D$           |
| e) $\log_2 M - \log_2 C + \log_2 3$ | f) $3 \log_a x + 2 \log_a y$       |
| g) $3 \log 7 - 2 \log y$            | h) $7 \log x - \frac{1}{2} \log y$ |
| i) $\log 5 + 2 \log x + \log 3$     | j) $2 \log_a C + 3 \log_a P + 1$   |

6) Calcule lo que señala, dados ciertos logaritmos.

- a) Dados  $\log_a (B) = 30,14$ ,  $\log_a (B \cdot D) = -2,15$ , calcular  $\log_a D$
- b) Dados  $\log_a (B) = 30,14$ ,  $\log_a \left(\frac{P}{B}\right) = 1,03$ , calcular  $\log_a P^2$

7) Resuelva cada ecuación, y compruebe:

- |                             |                         |                         |
|-----------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a) $\log_3 27 = x$          | b) $\log_3 x = 4$       | c) $\log_x 15 = -1$     |
| d) $\log_5 x = \frac{1}{2}$ | e) $\log_4 y = -2$      | f) $\log_{0,1} 100 = x$ |
| g) $\log x = 4$             | h) $\log_2 x = 0$       | i) $\log_{0,02} x = -1$ |
| j) $\log_{\sqrt{3}} x = 2$  | k) $\log_4 (y + 3) = 2$ | l) $\log(3y - 1) = 2$   |

$$\begin{array}{lll} \text{m) } \log_2(x-2) = -5 & \text{n) } \log_4\left(\frac{3-x}{7}\right) = 1 & \text{o) } \log_6(2x-5) = 0 \\ \text{p) } \log\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3 & \text{q) } x-3 = 4^{\log_4(30)} & \text{r) } \log_{\frac{1}{2}}(5(x-1)) = 3 \end{array}$$

8) Determine el valor de  $x$  en cada ecuación, y compruebe:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \log_3 x = \log_3 7 & \text{b) } \log_3(3x-1) = \log_3 7 \\ \text{c) } \log_3(2x) = \log_3(x+5) & \text{d) } \log_3(x-2) = 2\log_3 5 \\ \text{e) } \log(3) = \log(x+1) & \text{f) } \log\left(\frac{x}{3}\right) = \log\frac{2x+7}{4} \\ \text{g) } \log_2(2x) - \log_2(7x-15) = 0 & \text{h) } \log_3(2x) = \log_3(x-5) \\ \text{i) } \log(x) + \log(10) = \log(x-2) & \text{j) } \log_2(x-3) - \log_2 6 = \log_2(2x+1) \end{array}$$

9) Resuelva cada ecuación:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2^x = 5 & \text{b) } 10^x = 25 & \text{c) } 7^x = 0,5 \\ \text{d) } 3^{x+5} = 100 & \text{e) } 2^{2x-1} = 3^x & \text{f) } 3^{x+5} = 1 \end{array}$$

10) Determine el valor de  $x$  en cada ecuación, y compruebe:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \log_3 x = -\log_3 7 & \text{b) } \log_3(2x-1) = -\log_3 7 & \text{c) } \log_3 x = -\log_3 x \\ \text{d) } \log_3(x-1) = -2\log_3 2 & \text{e) } \log(3) = -\log(x+1) & \text{f) } \log\left(\frac{x}{3}\right) = -\log\frac{2}{2x-5} \end{array}$$

11) Determine el valor de  $x$  en cada ecuación, y compruebe:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \log\left(\frac{x-3}{5}\right) = \log(2x+1) & \text{b) } 2\log x = \log(x+6) & \text{c) } 1 + \log x = \log(2x+4) \\ \text{d) } \frac{\log(x)}{\log(5)} = 2 & \text{e) } \frac{\log(5-x)}{\log(2)} = -1 & \text{f) } \frac{\log_3(7x-3)}{\log_3(x)} = 1 \end{array}$$